УДК 530.1

А. А. Юрова

ПРИДОННОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ НА НАКЛОННОМ ДНЕ В ЭКМАНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Обсуждается вывод и пределы применимости уравнения, описывающего динамику тонкого слоя жидкости на наклонном дне, в приближении погранслоя Экмана. Найдены точные решения типа бегущих волн. На основе анализа Пенлеве сделан вывод о неинтегрируемости этого уравнения.

The article examines the deduction and the scope of the equation describing the dynamics of a thin layer of liquid over inclined bottom in the framework of Eckman's approach and obtains exact solutions in the form of travelling waves. The author makes a conclusion this equation is non-integrable on the basis of Painlevé analysis.

Ключевые слова: придонное течение, приближение погранслоя, критерий Пенлеве.

Keywords: bottom current, boundary layer approximation, Painlevé criterion.

Существуют многочисленные натурные примеры, когда более плотная жидкость движется вдоль наклонного дна в окружении менее плотной воды. Описание этого сложного явления возможно лишь при существенном упрощении исходных уравнений, которое в свою очередь диктуется теми или иными физическими соображениями. Например, можно пренебречь вязкостью или эффектами плавучести и т.д. В этой статье мы хотим рассмотреть некоторые физические и математические особенности уравнения, выведенного в [5]. В отличие от более ранних работ [2—4], в статье [5] приняты во внимание два дополнительных аспекта.

Во-первых, произведен учет вязкости. Авторы вышеупомянутых статей пренебрегают последней, аргументируя тем, что в изучаемых ими ситуациях характерная толщина течений в несколько раз превышает толщину слоя Экмана (см., например, [1]). Вместе с тем, как отмечено в [5], даже если придонный слой Экмана меньше толщины течений, его наличие приводит к переносу жидкости над пограничным слоем, в Северном полушарии влево от скорости основного потока, а в Южном — вправо. Очевидно, что, замещая снесенную воду, более тяжелая жидкость над слоем Экмана будет опускаться, что приводит к расплыванию языка плотных вод, а значит, и к уменьшению его толщины. Этот процесс спустя некоторое время приведет к тому, что толщина языка сравнится по порядку величины с толщиной погранслоя и, следовательно, пренебрежение эффектами вязкости становится недопустимым.

Учитывая эти ограничения, сделаем грубую оценку времени, требуемого для уменьшения толщины языка плотных вод до характерной величины, равной глубине трения $d_0 = \pi\sqrt{\frac{\nu}{f\rho}}$, где f — параметр Кориолиса, ν — коэффициент вертикального турбулентного трения (эффективной вязкости), ρ — плотность тяжелых вод. Для этого будем считать, что d — ширина течения ($d \approx 5\cdot10^3$ м), H — толщина ($H \approx 2\cdot10^2$ м), L — длина ($L \approx 10^6$ м). Эти данные соответствуют реально наблюдающимся течениям, являющимся продолжением языка полярных вод в Северном полушарии на склонах Северо-Американской котловины вокруг Бермудской возвышенности. Общая масса такого языка определяется соотношением $m = Ld\rho(H - d_0)$, где мы вычли массу воды, принадлежащей вязкому пограничному слою.

Пусть U — характерная скорость движущихся плотных вод, тогда характерное кориолисово ускорение $a \approx \frac{fU}{m}$. Поскольку язык достаточно узок (см. цитируемые обзоры), то примем для простоты приближение равноускоренного движения, т.е. предположим, что кориолисово ускорение постоянно и одинаково для всех точек потока. Толщина слоя движущейся воды сравняется по порядку величины с d_0, если характерный масштаб кориолисова смещения сравняется с шириной языка d. При этом, образно выражаясь, весь язык «соскользнет с погранслоя» и расплывется по дну. Характерное время этого процесса t находим из соотношения $d \approx at^2$, откуда и получаем наивную оценку t:

$$t = \sqrt{\frac{\rho L d^2 (H - d_0)}{fU}}. \tag{1}$$

Таким образом, по прошествии времени, вычисленного по формуле (1), пренебрегать экмановским слоем нельзя.

Следует отметить, что вода, соскальзывающая с вязкого пограничного слоя, в свою очередь образует погранслой, т.е. ширина последнего увеличивается. Это означает, что время сползания всего языка плотных вод в действительности превышает наивную оценку (1).

Во-вторых, в цитируемой работе произведено сильное упрощение уравнений движения до приближения экмановского пограничного слоя. Эти уравнения имеют вид

$$-fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_1} + \upsilon\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + g_{\xi_1}, \quad -fU = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_2} + \upsilon\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \tag{2}$$

где U и V — компоненты скорости вниз по склону и вдоль изобаты, p — давление, ось ξ_1 направлена вниз по склону, ξ_2 — вдоль изобаты, ось y — по нормали к дну. Пусть точки K и L принадлежат верхней и нижней границам сечения языка более плотных вод с плотностью $\rho + \delta\rho$ в окружении более легкой воды с плотностью ρ.

В уравнениях (2) все неизвестные функции зависят от координат и времени, однако из-за малой толщины погранслоя U, V и p в основном зависят от координаты y.

Пусть V_g — геострофическое течение, которое высоко над дном направлено вдоль ξ_2. Течение в придонном слое задается экмановскими соотношениями:

$$V_e = V_g\left(1 - e^{-\mu y}\cos\mu y\right),\ U_e = V_g e^{-\mu y}\sin\mu y\,,$$

причем, следуя [5], будем рассматривать южное полушарие. Величина μ равна $\mu = \sqrt{-\dfrac{f}{2\upsilon}}$. В работе [5] учтены и гравитационные силы плавучести, учет которых приводит к тому, что в более тяжелой жидкости действует дополнительная возмущающая архимедова сила F_A. Выражение для нее получается следующим образом. Рассмотрим точки *A* и *B*, равноудаленные от дна. Давление в этих точках, в приближении гидростатики, задается соотношениями:

$$p_A = \rho g\left(|AD| + |DD_1|\right) + \delta\rho g|AD| + C_A,\ \ p_B = \rho g\left(|BM_1| + |M_1N_1|\right) + \delta\rho g|BM_1| + C_B\,. \quad (3)$$

Эти соотношения легко получаются интегрированием гидростатического уравнения, C_A и C_B — постоянные интегрирования. Отсюда разность давлений:

$$\Delta p \equiv p_B - p_A = g\left[(\rho + \delta\rho)|BC| + \delta\rho|MM_1|\right]. \quad (4)$$

В соотношении (4) учтено, что из условия обнуления выражений (3) на верхней границе следует $C_A = C_B$.

Обозначим $|AC| \equiv dx$ и положим $|MM_1| \approx |MN|$. Тогда из (4) и геометрии рисунка получаем $\Delta p = gdx[\rho\tan\alpha + \delta\rho(\tan\gamma + \tan\alpha)]$. Учтем, что $d\xi\cos\alpha = dx$, где $d\xi = |AB|$, следовательно,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi} = g\left[(\rho + \delta\rho)\sin\alpha + \delta\rho\cos\alpha\tan\gamma\right].$$

Отсюда

$$-\frac{1}{\rho + \delta\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\xi} + g\sin\alpha = -\frac{g\delta\rho}{\rho + \delta\rho}\cos\alpha\tan\gamma \approx -\frac{g\delta\rho}{\rho}\cos\alpha\tan\gamma\,. \quad (5)$$

Мы воспользовались условием $\delta\rho << \rho$ для упрощения наших выражений. Соотношение (5) входит в динамические уравнения как архимедова сила, действующая вдоль дна ($\xi_1 = \xi$). Пусть $h(\xi,t)$ граница раздела тяжелой и легкой вод KDM_1L. Легко видеть, что $\dfrac{\partial h}{\partial\xi} = \tan(\alpha + \gamma) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\gamma}$, откуда можно выразить $\tan\gamma$:

$$\tan\gamma = \frac{\frac{\partial h}{\partial\xi} - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\,\frac{\partial h}{\partial\xi}}\,. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем окончательное выражение для F_A:

$$F_A = \frac{\delta\rho g\cos\alpha\left(\tan\alpha - \frac{\partial h}{\partial\xi}\right)}{\rho\left(1+\tan\alpha\,\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)}.$$

Используя полученные выражения, условия прилипания на дне и положив скорости на границе языка равными скоростям невозмущенного экмановского движения, было получено для $h(\xi,t)$ следующее нелинейное уравнение в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + C(H)\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right). \tag{7}$$

Здесь $x = \frac{\xi_1}{L}$, $H = \mu h(\xi,t)$,

$$C(H) = e^{-H}\sin H + M\,\frac{\sinh H\sin H}{(\cosh H + \cos H)^2}, \tag{8}$$

$$K(H) = N\,\frac{\sinh H - \sin H}{\cosh H + \cos H}. \tag{9}$$

Безразмерные числа M и N определяют соответственно относительный вклад гравитационного плотностного течения в сравнении с экмановским в общий перенос вниз по склону и вклад перепада давления, связанного с избыточной плотностью в языке, в динамику движения жидкости. Мы не будем приводить их явный вид (см. [5]), отметим лишь, что численное значение M может быть как малым, так и большим, тогда как «диффузионный коэффициент» N всегда мал.

Уравнение (7) решалось численно. Прежде чем кратко обсудить результаты численного интегрирования, отметим, что (7) напоминает уравнение Бюргерса, которое, как известно, может быть проинтегрировано аналитически с помощью подстановки Коула-Хопфа путем сведения к линейному, однородному уравнению теплопроводности, причем имеются и многомерные обобщения соответствующих уравнений [6].

Разложим тригонометрические и гиперболические функции, входящие в (8) и (9) в тейлоровские ряды, предполагая $H \ll 1$. Тогда $C(H) \approx H$, $K(H) \approx 4\lambda H^3$, $\lambda \equiv \frac{N}{6}$. Мы оставили лишь главные члены разложения. В результате вместо (7) получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(H^2\right) = \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H^4\right). \tag{10}$$

Уравнение (10), по-видимому, тоже не интегрируется в общем случае (см. конец этой статьи). Можно, однако, получить частные решения (10) типа бегущих волн. Пусть $H = H(\eta)$, $\eta \equiv x - ct$. Выбор $c > 0$ отвечает волне, бегущей вниз по склону, а $c < 0$ — соответственно вверх. Так как $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\eta}$, $\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial\eta}$, то, интегрируя (10) один раз, получаем

$$-cH+\frac{H^2}{2}-\lambda H^3\frac{\partial H}{\partial\eta}=c_1, \tag{11}$$

где c_1 константа интегрирования. В уравнении (11) переменные разделяются, и мы получаем три варианта решений типа бегущая волна:

1) при $c_1>-c^2/2$ имеем

$$\frac{\eta-\eta_0}{2\lambda}=\frac{H^2}{2}+2cH+\left(2c^2+c_1\right)\ln\left|H^2-2cH-2c_1\right|+$$
$$+\frac{c\left(3c_1+2c^2\right)}{\sqrt{c^2+2c_1}}\ln\left|\frac{H-c-\sqrt{c^2+2c_1}}{H-c+\sqrt{c^2+2c_1}}\right|; \tag{12}$$

2) при $c_1<-c^2/2$:

$$\frac{\eta-\eta_0}{2\lambda}=\frac{H^2}{2}+2cH+\left(2c^2+c_1\right)\ln\left|H^2-2cH-2c_1\right|+$$
$$+\frac{2c\left(3c_1+2c^2\right)}{\sqrt{-c^2-2c_1}}\arctan\frac{H-c}{\sqrt{-c^2-2c_1}}; \tag{13}$$

3) наконец, при $c_1=-c^2/2$:

$$\frac{\eta-\eta_0}{2\lambda}=\frac{H^2}{2}+2cH+3c^2\left|H-c\right|-\frac{c^3}{H-c}. \tag{14}$$

Отметим, что полученные решения с хорошей точностью описывают реальные морские гравитационные течения, если $H \ll 1$. Несложно получить аналитическую оценку «подходящей» толщины пограничного слоя вместе с условием ее малости. Так характерные толщины течений, описываемых соотношениями (12) и (13), определяются по порядку величины формулой

$$H\approx\sqrt[4]{8c_1\left(k-\hat{\eta}\right)},$$

где $\hat{\eta}\equiv\frac{\eta-\eta_0}{2\lambda}$, $k=\left(2c^2+c_1\right)\ln\left|2c_1\right|+\frac{c\left(3c_1+2c^2\right)}{\sqrt{c^2+2c_1}}\ln\left|\frac{c+\sqrt{c^2+2c_1}}{\sqrt{c^2+2c_1}-c}\right|$ в случае (12) и $k=\left(2c^2+c_1\right)\ln\left|2c_1\right|-\frac{2c\left(3c_1+2c^2\right)}{\sqrt{-c^2-2c_1}}\arctan\frac{c}{\sqrt{-c^2-2c_1}}$ в случае (13), причем это приближение справедливо, если $\hat{\eta}\gg k-\frac{1}{8c_1}$. Для решения же (14) характерная толщина выражается соотношением $H\approx\frac{\hat{\eta}-c^2\left(3\left|c\right|+1\right)}{3c\left(1-\left|c\right|\right)}$, причем $x\ll\eta_0+c\left[t+2\lambda\left(3-c-3\left|c\right|\left(1+c\right)\right)\right]$.

Полученные выше точные решения качественно совпадают с результатами численного интегрирования, представленными в работе [5]. В частности, волны, бегущие вверх по склону, могут иметь место в режиме, когда экмановский перенос вверх превосходит гравитационный снос вниз. При этом возможны случаи движения всего языка вверх с одновременным расплыванием вдоль дна или отсутствие сноса вдоль склона, но с присутствием только эффекта расплывания. Все процессы становятся очень существенными на временах один — два года. По истечении этого времени течения становятся очень тонкими и медленно эволюционируют в вязком экмановском придонном слое. Например, для придонной антарктической воды экмановский и гравитационный переносы примерно одного порядка, но экмановский перенос несколько превосходит гравитационный снос.

В условиях, характерных для придонных течений типа придонных бермудских, движение вниз или вверх по склону, а также расплывание профиля из-за экмановского переноса происходит на характерных временах более года на расстояние порядка тысяч километров.

Таким образом, времена, на которых становится необходимым учет слоя Экмана, составляют порядка года. При значительных уклонах дна скатывающиеся вниз более плотные воды могут формировать боры и быть ответственными за придонные штормы. В работе [5] получены оценки скорости распространения переднего фронта боры.

В заключение рассмотрим еще раз уравнение (10) с точки зрения его интегрируемости. Утверждение, что это уравнение не обладает таким свойством, основано на справедливости критерия Пенлеве и анализе особых точек (10). Следуя стандартной процедуре (см., например, [4]), выберем $c = \lambda = 1$ и подставим в ОДУ, полученное редукцией из (10) в приближении бегущих волн, выражение $H(\eta) = \dfrac{a}{(\eta - \eta_0)^p}$. Получаем

$$ap(\eta - \eta_0)^{-4p-2}\left[(\eta - \eta_0)^{3p+1} - a(\eta - \eta_0)^{2p+1} - 4a^3(\eta - \eta_0)\right] = 0. \qquad (15)$$

В главном порядке из (15) имеем p=1/4. Другими словами, подвижная особенность представляет собой алгебраическую точку ветвления и, следовательно, критерий Пенлеве не выполняется.

Список литературы

1. *Nof D., Paldor N., Van Golder S. Abyssal Gyres* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1991. V. 58. P. 137—196.

2. *Weatherly G.L., Kelley E.A. Ir.* Two cold bottom layers at base of Scotian Risi // J. Mar. Res. 1982. V. 40. P. 985—1102.

3. *Weatherly G.L., Kelley E.A. Ir.* Two views of cold filament // J. Phys. Oceanogr. 1985. V. 15. P. 68—81.

4. *Абловиц М.Б, Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.

5. *Жмур В.В., Назаренко Д.В.* Динамика тонкого слоя жидкости повышенной плотности у наклонного дна // Океанология. 1994. Т. 34, № 2. С. 193—200.

6. *Yurov A.V., Yurov V.A., Rudnev M.* Lax pairs for higher-dimensional evolution PDE's and a 3+1 dimensional integrable generalization of the Burgers equation // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. 135. P. 731—741 [ArXiv:nlin. SI/0411061].

Об авторе

А. А. Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., КГТУ.

Author

A. Yurova — Dr., Kaliningrad State University of Technology.